مجلّة جامعة عدن للعلوم الانسانيّة والاجتماعية
EJUA-HS Vol. 2 No. 3 (2021)
https://doi.org/10.47372/ejua-hs.2021.3.117
ISSN: 2708-6275

مقالة بحثية

كم عدد المربعات والمستطيلات المرسومة في مربع أو مستطيل مقسم إلى مربعات صغيرة؟

سالم أحمد عبدالله عبد الكبير

قسم الرياضيات، كلية التربية - عدن، جامعة عدن، اليمن

*** الباحث الممثل: سالم أحمد عبدالله عبد الكبير؛ البريد الالكتروني: salemabdalkabeer@gmail.com**

استلم في: 02 سبتمبر 2021 / قبل في: 21 سبتمبر 2021 / نشر في: 29 سبتمبر 2021

المُلخَّص

هدف البحث لحل المسألة: كم عدد المربعات والمستطيلات المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة أو المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة؟ واستخدم الباحث الاستقراء لإيجاد العلاقات العامة لحل أسئلة البحث، كما استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة صحة النتائج. وتوصل الباحث إلى النتائج التالية:

1- عدد المربعات المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة تساوي

$$n(n+1)(2n+1)/6$$

2- عدد المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة تساوي

$$n^2(n+1)^2/4$$

3- عدد المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة تساوي

$$n(n^2-1)(3n+2)/12$$

4- عدد المربعات المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة يساوي

$$m(m+1)(3n-m+1)/6$$

5- عدد المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة يساوي

$$nm(n+1)(m+1)/4$$

6- عدد المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة يساوي

$$\frac{m(m+1)\{3n(n-1)+2(m-1)\}}{12}$$

الكلمات المفتاحية: الاستقراء الرياضي، مسألة رياضية.

مقدمة:

تعد الرياضيات أحد فروع المعرفة، التي تعمل على تنمية التفكير وتساعد في حل المشكلات، وتتميز بالبنية المنطقية والتراكمية المترابطة.

إن التطور الذي حدث في مجال الرياضيات، ارتبط بالتطور العلمي والتكنولوجي الذي يعد سمة العصر، وقد ظهرت نتيجة لذلك مفاهيم جديدة وموضوعات حديثة في الرياضيات اقتضتها الضرورة لحل المشكلات الحياتية الناتجة عن التقدم العلمي والتقني.

إن القدرة على حل المشكلات الناتج الأكثر أهمية للتعلم، حيث أن الفرد القادر على حل المشكلات يمكنه أن يتعلم بنفسه في استقلالية تامة، إذ يهدف تدريس حل المشكلات إلى تنمية قدرات المتعلم على حل أنواع عديدة من المشكلات غير المألوفة لديه، لهذا يحتاج المتعلم إلى قدر معين من المعلومات والمهارات، فالقدرة على استخدام المعلومات والحقائق هي جزء ضروري في تنمية حل المشكلات. (بدوي، 2003، ص 191)

إن اعتبار سؤال ما مشكلة أو مسألة يعتمد على المعرفة التي يمتلكها الفرد. فقد يجيب أحد الأشخاص على سؤال ما بطريقة روتينية مألوفة، بينما يحتاج آخر إلى التفكير إذا كانت معرفته لا تقدم له طريقة للإجابة عن ذلك السؤال. وما هو مسألة عند فرد معين اليوم قد لا يكون كذلك في الغد. لذلك تعددت تعريفات المسألة الرياضية عند التربويين.

ويظهر مصطلح حل المشكلة في كثير من المهن وفروع المعرفة المختلفة ومنها الرياضيات، ويقصد به "مجموعة العمليات الفردية المكتسبة، يستحضرها الفرد ليستخدمها في الموقف الذي يجابهه" (بدوي، 2003، ص 193)، وترى (البكري والكسواني، 2005، ص 139) أن حل

المسألة يعني " الاستجابة المناسبة لوضع جديد لم يتعرض له المتعلم من قبل وليس لديه حلول جاهزة، وهذا يتطلب من المتعلم أن يفكر ويحلل ويستخدم ما لديه ليتمكن من حلها".

إن حل المسألة الرياضية له أهمية كبيرة في تعليم وتعلم الرياضيات، فحل المسألة وسيلة ذات معنى للتدريب على المهارات الحسابية، ومن خلال المسألة تكتسب المفاهيم العلمية معنى ووضوحاً لدى المتعلم، وعن طريق حل المسألة يتم تطبيق القوانين والتعميمات في مواقف جديدة، كما يتم تنمية أنماط التفكير لدى الطلبة والتي يمكن أن تنتقل إلى مواقف أخرى (سليمان وآخرون، 2002، ص 139)، كما يعتبر حل المسألة وسيلة لإثارة الفضول الفكري وحب الاستطلاع (أبوزينة، 1982، ص 203). ويرى (عفانة، 1996، ص 17) أن عملية حل المسائل الرياضية تتحدى فكر المتعلم وتجعله في حالة من التفكير المستمر والتواصل في إيجاد الحلول المتوقعة والمرغوبة، حيث يستخدم المتعلم ما لديه من معلومات رياضية وقوانين ومهارات خاصة في بناء استراتيجيات حل المسائل المطروحة.

ويعد الاستقراء من الاستراتيجيات المهمة في حل المسائل الرياضية وهو الوصول إلى الأحكام العامة أو النتائج اعتماداً على حالات خاصة أو جزئيات من الحالة العامة. أي أن الجزئيات أو الحالات الخاصة هي أمثلة من الحالة العامة أو النتيجة التي تم استقراؤها.

ومن خلال اطلاع الباحث على عدد من المراجع في الأدب التربوي، فقد وجد الباحث إجابة عن السؤال الفرعي الأول للبحث (stan وآخرون، 1997، ص 307) والسؤال الفرعي الخامس للبحث (كرانتس، 2014، ص 166) بطرق غير الذي استخدمها الباحث، ولكنه لم يجد إجابة عن باقي الأسئلة، وهنا يحاول الباحث الإجابة عن أسئلة البحث باستخدام الاستقراء الرياضي.

أسئلة البحث:

في ضوء ما سبق تتحدد أسئلة البحث في السؤال الرئيس الآتي: كم عدد المربعات والمستطيلات المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة أو المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة؟

وفي ضوء سؤال البحث الرئيس يمكن صياغة الأسئلة الفرعية الآتية:

1- كم عدد المربعات المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة؟
2- كم عدد المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة؟
3- كم عدد المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة؟
4- كم عدد المربعات المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة ؟
5- كم المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة ؟
6- كم المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ $(m < n)$ من المربعات الصغيرة ؟

أهداف البحث:

تتمثل أهداف البحث في الوصول لعلاقات عامة تمثل إجابات لأسئلة البحث وبرهنة تلك العلاقات رياضياً.

عمل الجداول:

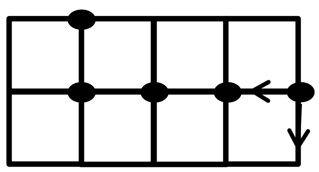
لتوضيح كيفية عمل الجداول في البحث يعطي الباحث المثال التالي:

مثال(1):

كم عدد المربعات المرسومة في مستطيل مقسم إلى 2×4 (صفين وأربعة أعمدة) من المربعات الصغيرة؟

الحل:

1- من خلال النقاط البارزة (⬤) الشكل(1)، يمكننا الحصول على عدد مربع واحد فقط لكل نقطة (يتم الرسم من أسفل النقطة أو يسارها فقط).



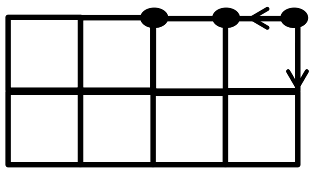
الشكل(1): يبين عدد المربعات التي يمكن رسمها من كل نقطة

2- نضع ما حصلنا عليه في الجدول(1) كما يلي:

الجدول (1): يبين عدد المربعات المرسومة من الشكل (1)

رقم الصف							
2	**1**						
1	**1**	**1**	**1**	**1**			
0					**المجموع**		**المجموع الكلي**
	1	**2**	**3**	**4**	**رقم العمود**		

3- من خلال النقاط البارزة (⬤) الشكل(2)، يمكننا الحصول على عدد مربعين اثنين فقط لكل نقطة (يتم الرسم من أسفل النقطة أو يسارها فقط).



الشكل (2): يبين عدد المربعات التي يمكن رسمها من كل نقطة

4- نضع ما حصلنا عليه في الجدول (1) فيصيركما في الجدول (2).

الجدول (2): يبين عدد المربعات المرسومة من الشكلين (1) و(2)

رقم الصف							
2	**1**	**2**	**2**	**2**			
1	**1**	**1**	**1**	**1**			
0					**المجموع**		**المجموع الكلي**
	1	**2**	**3**	**4**	**رقم العمود**		

5- نجمع رأسياً ثم نجمع المجموع أفقياً فنحصل على، كما في الجدول (3).

الجدول (3): يبين المجموع الرأسي والأفقي لعدد المربعات

رقم الصف							
2	**1**	**2**	**2**	**2**			
1	**1**	**1**	**1**	**1**			
0	**2**	**3**	**3**	**3**	**المجموع**	**11**	**المجموع الكلي**
	1	**2**	**3**	**4**	**رقم العمود**		

إذن عدد المربعات المرسومة في مستطيل مقسم إلى 4×2 (صفين وأربعة أعمدة) من المربعات الصغيرة يساوي 11 مربعاً.

مصطلحات البحث:

التعريف الإجرائي للاستقراء: هو الوصول إلى نتائج أسئلة البحث اعتماداً على حالات خاصة أو جزئيات من الحالة العامة. أي أن الجزئيات أو الحالات الخاصة هي أمثلة من الحالة العامة أو النتيجة التي تم استقراؤها.

التعريف الإجرائي للمسألة الرياضية: المسألة الرياضية هي سؤال جديد ومميز يواجه الفرد ويحتاج إلى إجابة، ويتمثل في السؤال الرئيس والأسئلة الفرعية للبحث.

المربع: شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية وجميع زواياه قائمة.

المستطيل: شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويين وجميع زواياه قائمة. وبالتالي كل مربع مستطيل وليس العكس.

منهجية البحث:

استخدم الباحث طريقة الاستقراء لإيجاد العلاقات العامة التي تمثل إجابة عن أسئلة البحث، وللتأكد من صحة هذه العلاقات تم برهنتها باستخدام الاستقراء الرياضي.

الخلفية النظرية:

أولاً: المسألة الرياضية.

يرى (عبدالهادي وآخرون، 2002، ص 114) أن " المسألة الرياضية تتكون من سؤال يحتاج إلى إجابة علماً بأنه ليس كل سؤال يحتاج إلى إجابة هو مسألة"، أما (سلامة، 2003، ص 82) فإنه يرى المسألة الرياضية " هي موقف جديد ومميز يواجه الطالب، ولا يكون لهذا الموقف حلاً جاهزاً عنده".

وهناك شروط حتى يكون الموقف مسألة حددها (خليفة، 1994، ص 84) بوجود هدف واضح يشعر به المتعلم ويسعى إلى تحقيقه، ووجود عائق في طريق تحقيق الهدف، ووجود واقعية نحو الحل.

ويرى (بدوي، 2003، ص 191) أنه لكي يعد الموقف مشكلة يتوقف ذلك على بعدين:

البعد الأول: نوع الموقف والذي قد يعد مشكلاً إذا ما تحدى تفكير الفرد، ولم تكن له سابق معرفة به، والبعد الثاني: الفرد الذي يواجه هذا الموقف، والذي يتطلب منه أن يفكر ويبحث عن طريقة للحل.

ويرى Hildebrandt أن المسألة الرياضية مستويات متنوعة منها ما يستخدم مفهوماً رياضياً أو تعميماً، ويتناول موقفاً لم يتعرض له الفرد سابقاً، ومنها ما يتطلب مقداراً معيناً من التجريب والملاحظة وجمع البيانات، ومنها ما يرتبط بالظروف والمواقف التي لم يتعرض لها الفرد ويتطلب منه إجراء تعديل وتغيير في هذه الظروف، ونوع يتطلب صياغة فرضيات أو حلول مقترحة تقدم، وأدلة أو براهين تناقش (أبوزينة، 2010، ص 310).

إن للمشكلات الرياضية أنواع وأشكال متعددة في ضوء المتغيرات البنائية لها، فمن حيث الألفة تقسم المسائل إلى روتينية ومسائل غير روتينية، ومن حيث صياغة المشكلة، منها ما يصاغ بقالب لغوي ومنها ما يصاغ بقالب رمزي أو معادلات، ومن حيث محتوى المشكلة، فمنها ما يكون محتواها مصاغاً بصورة مجملة، ومنها ما يكون محتواها مصاغ بصورة مجزئه، ومنها ما يكون محتواها مصاغاً بصورة تنظيم التفكير، ومن حيث عدد الخطوات، فمنها ما يحتاج حله إلى خطوة واحدة ومنها ما يحتاج إلى خطوتين أو أكثر، ومن حيث عدد العمليات الحسابية، منها ما يحتاج إلى عملية واحدة، ومنها ما يحتاج إلى عمليتين أو أكثر، ومن حيث الحاجة إلى العلاقات الواردة بالمسألة للحل، نقسم المسائل الرياضية إلى مسائل بها معلومات زائدة ومسائل بها معلومات ناقصة، ومسائل ليس بها أي من هذين النوعين من المعلومات، وهذه الأنواع من المسائل بدأت تلقى اهتماما خاصاً من قبل القائمين على تدريس الرياضيات نظراً لأهميتها في التدريب على فهم التلميذ للمسألة.(Bernadette, 2010, p87)

ويواجه الطلاب صعوبات أثناء قيامهم بحل المسألة الرياضية حيث صنفها (عفانة، 1996، ص 189) إلى ثلاثة أبعاد: 1- صعوبات التفكير في معطيات المسألة، 2- وصعوبات التفكير في إجراءات حل المسألة، 3- وصعوبات التفكير في مصطلحات المسألة.

ويحدد جورج بوليا مراحل أربعة يمر فيها حل المسألة وهي فهم المسألة، وابتكار الخطة، وتنفيذ فكرة الحل، ومراجعة الحل.

ويذكر (عفانة، 1995، ص 49) أنه توجد عدة اعتبارات عند اختيار الاستراتيجية المستخدمة في حل المسألة الرياضية، وتتمثل في مراعاة الزمن، والأخذ بعين الاعتبار مستوى صعوبة المسألة، والتعرف على الظروف السابقة لاختيار الاستراتيجية المراد استخدامها في الحل، والكشف عن معدل الخطأ الناجم عن استخدام الإجراءات العملية للاستراتيجية المختارة.

وظهرت الكثير من الاستراتيجيات في حل المسألة الرياضية، يحددها (الصادق، 2001، ص 245) بالعمل للخلف وإيجاد نموذج للحل، وتبني وجهة نظر مختلفة، وإيجاد حل مشكلة أبسط، واستخدام الرسوم لتمثيل المسألة بصرياً، واستخدام معلومات زائدة، واستخدام المطلوب من المسألة على مراحل (تجزئة)، وترتيب البيانات في المسألة، واستخدام النماذج المحسوسة، والتمثيل في حل المشكلة، التخمين والاختيار، والجداول والرسوم البيانية، والتجريب، والتقريب، وتحديد صفات الأشياء.

ويذكر (كرانتس، 2014، ص2) أنه من بين الأساليب المستخدمة في حل المسائل "الاستقراء، التناقض، الاستنفاذ، التقسيم، القياس، التعميم، التخصيص، إعادة الصياغة، التفريق، إعادة التركيب، التحليل المساعد، العد، طرائق الرسم، الرسومات التخطيطية، وبالطبع فإن هذه القائمة ليست كاملة، كما أنه من الممكن استخدام أفكار من عدد من هذه الطرق لحلّ إحدى المسائل".

ثانياً: الاستقراء.

الاستقراء هو استدلال صاعد، يبدأ من الجزئيات وينتهي إلى الأحكام أو النتائج العامة أو الكلية، وبهذا يكون نتيجة الاستقراء أعم من أية مقدمة من المقدمات التي تم الاعتماد عليها في الوصول إلى هذه النتيجة. (أبوزينة، 2010، ص 33)

وتعرف طريقة الاكتشاف الاستقرائي وهي التي يتم بها اكتشاف مفهوم أو مبدأ من خلال دراسة مجموعة من الأمثلة النوعية لهذا المفهوم أو المبدأ ويشمل هذا الأسلوب على جزأين الأول يتكون من الدلائل التي تؤيد الاستنتاج الذي هو الجزء الثاني وقد تجعل الدلائل الاستنتاج موثوق به إلى أي درجة كانت وهذا يتوقف على طبيعة تلك الدلائل. (أبوأسعد، 2010، ص 146)

ويعرف الاستقراء أنه الوصول إلى الحالة العامة من خلال مجموعة من الحالات الخاصة (فرج الله، 2014، ص 100)

الخطوات الإجرائية للطريقة الاستقرائية:

1- عرض الحالات الفردية: بمعنى أن يقدم المعلم عدداً كافياً من الأمثلة (الحالات الفردية التي تشترك في خاصية معينة).

2- دراسة الحالات الفردية: بمعنى مناقشة الأمثلة ومقارنتها وموازنتها لاستنباط القانون أو القاعدة.

3- صياغة التعميم: أي صياغة عبارة عامة تمثل تجريداً للخاصية المشتركة التي تم التوصل إليها.

4- اختبار صحة التعميم: بمعنى اختبار صحة القاعدة العامة عن طريقة التأكد من صدقها على حالات فردية أخرى متشابهة. (أبوالحديد، 2013، ص 96)

خطوات الاستقراء الرياضي:

1- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$.

2- نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = r$.

3- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r + 1$.

نتائج البحث:

الإجابة عن السؤال الفرعي الأول:

للإجابة عن السؤال الفرعي الأول والذي ينص على كم عدد المربعات المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة ؟ نقوم بالاستقراء كما يلي:

- عندما $n = 1$

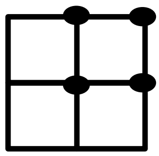
الشكل (3): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقطة البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل (3)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول (4):

الجدول (4): يبين عدد المربعات من الشكل (3)

رقم الصف				
1	1			
0	1	المجموع	1	المجموع الكلي
	1	رقم العمود		

- عندما $n = 2$



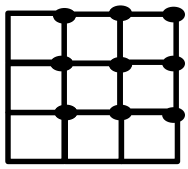
الشكل (4): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل (4)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول (5):

الجدول (5): يبين عدد المربعات من الشكل (4)

رقم الصف					
2	1	2			
1	1	1			
0	2	3	المجموع	5=1+4	المجموع الكلي
	1	2	رقم العمود		

- عندما $n = 3$



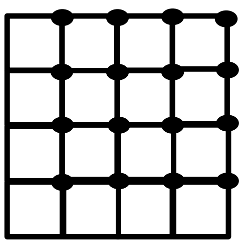
الشكل (5): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل (5)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول (6):

الجدول (6): يبين عدد المربعات من الشكل (5)

رقم الصف						
3	1	2	3			
2	1	2	2			
1	1	1	1			
0	3	5	6	المجموع	14=1+ 4+ 9	المجموع الكلي
	1	2	3	رقم العمود		

- عندما $n = 4$



الشكل (6): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل (6)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول (7):

الجدول (7): يبين عدد المربعات من الشكل (6)

رقم الصف							
4	1	2	3	4			
3	1	2	3	3			
2	1	2	2	2			
1	1	1	1	1			
0	4	7	9	10	المجموع	30=1+4+9+16	المجموع الكلي
	1	2	3	4	رقم العمود		

مما سبق يمكن استنتاج أنه إذا كان لدينا مربع مقسم لعدد $n \times n$ من المربعات الصغيرة، فإنه يمكننا الحصول على العدد الكلي للمربعات المرسومة من خلال العلاقة التالية:

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

ملاحظة: من خلال الجدول (4) نلاحظ تشكل الأرقام على شكل L ولها نفس الرقم كما هو موضح بالألوان.

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$

$$1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2 \times 1 + 1)$$

$$\rightarrow 1 = 1$$

$\therefore$العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فتصبح العلاقة.

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + r^2 = \frac{r}{6}(r+1)(2r+1)$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r + 1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(r+1)^2$) فتصبح العلاقة.

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + r^2 + (r+1)^2 = \frac{r}{6}(r+1)(2r+1) + (r+1)^2 = \frac{(r+1)(2r^2+r) + 6(r+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(r+1)}{6}(2r^2 + 7r + 6) = \frac{(r+1)}{6}(r+2)(2r+3)$$
$$= \frac{(r+1)}{6}\big((r+1)+1\big)\big(2(r+1)+1\big)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة $\forall\, n \in N^+$

الإجابة عن السؤال الفرعي الثاني:

للإجابة عن السؤال الفرعي الثاني والذي ينص على كم عدد المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة ؟ نقوم بالاستقراء كما يلي:

- عندما $n = 1$

من خلال النقاط البارزة الشكل (3) يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (8):

الجدول (8): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (3)

رقم الصف				
1	1			
0	1	المجموع	$1 = (\frac{2 \times 1}{2})(\frac{2 \times 1}{2})$	المجموع الكلي
	1	رقم العمود		

- عندما $n = 2$

من خلال النقاط البارزة الشكل (4)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (9):

الجدول (9): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (4)

رقم الصف					
2	2	4			
1	1	2			
0	3	6	المجموع	$9 = (\frac{3 \times 2}{2})(\frac{3 \times 2}{2})$	المجموع الكلي
	1	2	رقم العمود		

- عندما $n = 3$

من خلال النقاط البارزة الشكل (5) يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (10):

الجدول (10): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (5)

رقم الصف						
3	3	6	9			
2	2	4	6			
1	1	2	3			
0	6	12	18	المجموع	$36 = (\frac{4 \times 3}{2})(\frac{4 \times 3}{2})$	المجموع الكلي
	1	2	3	رقم العمود		

- عندما $n = 4$

من خلال النقاط البارزة الشكل(6)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول(11):

الجدول (11): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (6)

رقم الصف							
4	4	8	12	16			
3	3	6	9	12			
2	2	4	2	8			
1	1	2	3	4			
0	10	20	30	40	المجموع	$100 = (\frac{5 \times 4}{2})(\frac{5 \times 4}{2})$	المجموع الكلي
	1	2	3	4	رقم العمود		

مما سبق يمكن استنتاج أنه إذا كان لدينا مربع مقسم لعدد $n \times n$ من المربعات الصغيرة، فإنه يمكننا الحصول على العدد الكلي للمربعات والمستطيلات من خلال العلاقة التالية:

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + n^3 = \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{2} = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2}{4}(1+1)^2$$

$$\rightarrow\ 1 = 1$$

∴العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فتصبح العلاقة.

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + r^3 = \frac{r^2}{4}(r+1)^2$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r + 1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(r+1)^3$) فتصبح العلاقة.

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + r^3 + (r+1)^3 = \frac{r^2}{4}(r+1)^2 + (r+1)^3 = \frac{(r+1)^2}{4}(r^2 + 4r + 4)$$
$$= \frac{(r+1)^2}{4}(r+2)^2 = \frac{(r+1)^2}{4}\big((r+1)+1\big)^2$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\ n \in N^+$

ملاحظة: يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات في السؤال الثاني من خلال حاصل ضرب رقم الصف في رقم العمود، انظر الجدول (11) مثلاً:

اللون الذهبي: $3 \times 2 = 6$

اللون الأحمر: $4 \times 3 = 12$

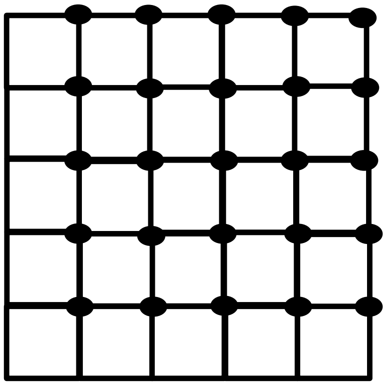
الإجابة عن السؤال الفرعي الثالث:

يمكننا الحصول على إجابة السؤال الفرعي الثالث والذي ينص على كم عدد المستطيلات (طولها لا يساوي عرضها) المرسومة في مربع مقسم إلى $n \times n$ من المربعات الصغيرة ؟ من خلال إجابة السؤال الفرعي الثاني مطروحة منها إجابة السؤال الفرعي الأول كما يلي:

$$0 + 4 + 18 + 48 + \cdots + (n^3 - n^2) = \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{2} - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{12}(n^2 - 1)(3n + 2)$$

مثال(2):

كم عدد المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) في الشكل (7)؟



الشكل (7): يبين عدد المستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

الحل:

بما أن $n = 5$

إذن عدد المستطيلات هو

$$\frac{5}{12}(25-1)(15+2) = 10 \times 17 = 170$$

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$

$$1^3 - 1^2 = \frac{1}{12}(1^2 - 1)(3 \times 1 + 2)$$

$$\rightarrow\ 0 = 0$$

∴العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فتصبح العلاقة.

$$0 + 4 + 18 + 48 + \cdots + (r^3 - r^2) = \frac{r}{12}(r^2 - 1)(3r + 2)$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r + 1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(r+1)^3 - (r+1)^2$) فتصبح العلاقة.

$$0 + 4 + 18 + 48 + \cdots + (r^3 - r^2) + (r+1)^3 - (r+1)^2)) =$$

$$\frac{r}{12}(r^2 - 1)(3r + 2) + (r+1)^3 - (r+1)^2 = \frac{r}{12}(r-1)(r+1)(3r+2) + (r+1)^2(r)$$

$$= \frac{(r+1)r\{(r-1)(3r+2) + 12r + 12\}}{12} = \frac{(r+1)r(3r^2 + 11r + 10)}{12}$$

$$= \frac{(r+1)r(r+2)(3r+5)}{12} = \frac{(r+1)(r^2 + 2r + 1 - 1)(3r + 3 + 2)}{12}$$

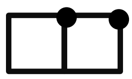
$$= \frac{(r+1)((r+1)^2 - 1)(3(r+1) + 2)}{12}$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\, n \in N^+$

الإجابة عن السؤال الفرعي الرابع:

للإجابة عن السؤال الفرعي الرابع والذي ينص على كم عدد المربعات المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ (حيث $n > m$) من المربعات الصغيرة ؟ نقوم بالاستقراء كما يلي:

- عندما $m \times n = 1 \times 2$



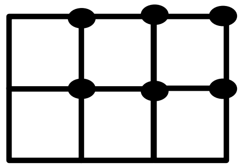
الشكل (8): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل (8)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول (12):

الجدول (12): يبين عدد المربعات من الشكل (8)

رقم الصف					
1	1	1			
0	1	1	المجموع	$2 = (2 \times 1) + (1 \times 0)$	المجموع الكلي
	1	2	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 2 \times 3$



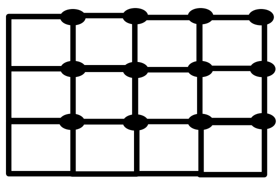
الشكل (9): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل(9)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول(13):

الجدول (13): يبين عدد المربعات من الشكل (9)

رقم الصف						
2	1	2	2			
1	1	1	1			
0	2	3	3	المجموع	$8 = (3 \times 2) + (2 \times 1)$	المجموع الكلي
	1	2	3	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 3 \times 4$



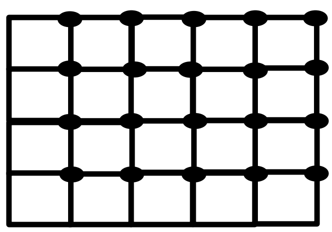
الشكل (10): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل(10)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول(14):

الجدول (14): يبين عدد المربعات من الشكل (10)

رقم الصف							
3	1	2	3	3			
2	1	2	2	2			
1	1	1	1	1			
0	3	5	6	6	المجموع	$20 = (4 \times 3) + (3 \times 2) + (2 \times 1)$	المجموع الكلي
	1	2	3	4	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 4 \times 5$



الشكل (11): يبين عدد المربعات والمستطيلات التي يمكن رسمها من النقاط البارزة

من خلال النقاط البارزة الشكل(11)، يمكننا الحصول على عدد المربعات كما في الجدول(15):

الجدول (15): يبين عدد المربعات من الشكل (11)

رقم الصف								
4	1	2	3	4	4			
3	1	2	3	3	3			
2	1	2	2	2	2			
1	1	1	1	1	1			
0	4	7	9	10	10	المجموع	$40=(5\times 4)+(4\times 3)+(3\times 2)+(2\times 1)$	المجموع الكلي
	1	2	3	4	5	رقم العمود		

مما سبق يمكن استنتاج أنه إذا كان لدينا مستطيل مقسم لعدد $m \times n$ من المربعات الصغيرة، فإنه يمكننا الحصول على عدد المربعات من خلال العلاقة التالي:

$$nm+(n-1)\times(m-1)+(n-2)\times(m-2)+(n-3)\times(m-3)+\cdots+n-(n-1)\times(m-m)$$

$$=nm+(nm-n-m+1)+(nm-2n-2m+4)+(nm-3n-3m+9)+\cdots+1\times 0$$

$$=m(nm)-(1+2+3+\cdots)(n+m)+(1+4+9+\cdots)$$

$$=nm^2-\sum_{i=1}^{m-1} i \times(n+m)+\sum_{i=1}^{m-1} i^2=\frac{m}{6}(m+1)(3n-m+1)$$

إذن $2+6+12+20+\cdots+mn=\frac{m}{6}(m+1)(3n-m+1)$

حيث $m<n$ و $m\geq 1$

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=2$ و $m=1$

$$1\times 2=\frac{1}{6}(1+1)(3\times 2-1+1)$$

$$\rightarrow\ 2=2$$

∴العلاقة صحيحة عندما $n=2$ و $m=1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=q$ و $m=p$ فتصبح العلاقة.

$$2+6+12+20+\cdots+pq=\frac{p}{6}(p+1)(3q-p+1)$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=q+1$ و $m=p+1$ (الحد المضاف للطرفين هو $((p+1)(q+1))$ فتصبح العلاقة.

$$2+6+12+20+\cdots+pq+(p+1)(q+1)=\frac{p}{6}(p+1)(3q-p+1)+(p+1)(q+1)$$

$$=\frac{(p+1)}{6}(3pq-p^2+p+6q+6)=\frac{(p+1)}{6}\big(3q(p+2)-(p^2-p-6)\big)$$

$$=\frac{(p+1)}{6}\big(3q(p+2)-(p-3)(p+2)\big)=\frac{(p+1)\ (p+2)}{6}(3q+3-p)$$

$$=\frac{(p+1)\ ((p+1)+1)}{6}(3(q+1)-(p+1)+1)$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\, m\,,n\,\epsilon\, N^+$ و $m\ <\ n$

الإجابة عن السؤال الفرعي الخامس:

للإجابة عن السؤال الفرعي الخامس والذي ينص على كم عدد المستطيلات (المربع مستطيل) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m \times n$ (حيث $m < n$) من المربعات الصغيرة ؟ نقوم بالاستقراء كما يلي:

- عندما $m \times n = 1 \times 2$

من خلال النقاط البارزة الشكل(8)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (16):

الجدول (16): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (8)

رقم الصف					
1	1	2			
0	1	2	المجموع	$3 = \frac{(2\times 1)}{2}\times\frac{3\times 2}{2}$	المجموع الكلي
	1	2	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 2 \times 3$

من خلال النقاط البارزة الشكل (9)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (17):

الجدول (17): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (9)

رقم الصف						
2	2	4	6			
1	1	2	3			
0	3	6	9	المجموع	$18 = \frac{(3\times 2)}{2}\times\frac{(4\times 3)}{2}$	المجموع الكلي
	1	2	3	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 3 \times 4$

من خلال النقاط البارزة الشكل (10)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (18):

الجدول (18): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (10)

رقم الصف							
3	3	6	9	12			
2	2	4	6	8			
1	1	2	3	4			
0	6	12	18	24	المجموع	$60 = \frac{(4\times 3)}{2}\times\frac{5\times 4}{2}$	المجموع الكلي
	1	2	3	4	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 4 \times 5$

من خلال النقاط البارزة الشكل (11)، يمكننا الحصول على عدد المربعات والمستطيلات كما في الجدول (19):

الجدول (19): يبين عدد المربعات والمستطيلات من الشكل (11)

رقم الصف								
4	4	8	12	16	20			
3	3	6	9	12	15			
2	2	4	6	8	10			
1	1	2	3	4	5			
0	10	20	30	40	50	المجموع	$150=\frac{(5\times 4)}{2}\times\frac{6\times 5}{2}$	المجموع الكلي
	1	2	3	4	5	رقم العمود		

مما سبق يمكن استنتاج أنه إذا كان لدينا مستطيل مقسم لعدد $m\times n$ من المربعات الصغيرة، فإنه يمكننا الحصول على عدد من المربعات (المربع مستطيل) من خلال العلاقة التالية:

$$\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}=\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$

إذن $3+15+42+90+\cdots+\frac{mn}{2}(m+n)=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$

حيث $m<n$ و $m\geq 1$

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=2$ و $m=1$

$$\frac{1\times 2}{2}(3)=\frac{1\times 2\times 2\times 3}{4}$$

$$\rightarrow\ 3=3$$

∴العلاقة صحيحة عندما $n=2$ و $m=1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=q$ و $m=p$ فتصبح العلاقة.

$$3+15+42+90+\cdots+\frac{pq}{2}(p+q)=\frac{pq(p+1)(q+1)}{4}$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=q+1$ و $m=p+1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(\frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2})$) فتصبح العلاقة.

$$3+15+42+90+\cdots+\frac{pq}{2}(p+q)+\frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2})$$
$$=\frac{pq(p+1)(q+1)}{4}+\frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2})=\frac{(p+1)(q+1)(pq+2p+2q+4)}{4}$$
$$=\frac{(p+1)(q+1)((p+1)+1)((q+1)+1)}{4}$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\, m\,,n\,\epsilon\, N^{+}$ و $m\ <\ n$

الإجابة عن السؤال الفرعي السادس:

للإجابة عن السؤال الفرعي السادس والذي ينص على كم عدد المستطيلات (طولها لا يساوي عرضها) المرسومة في مستطيل مقسم إلى $m\times n$ (حيث $m<n$) من المربعات الصغيرة ؟ نقوم بالاستقراء كما يلي:

- عندما $m\times n=1\times 2$

من خلال النقاط البارزة الشكل (8)، يمكننا الحصول على عدد من المستطيلات كما في الجدول (20):

الجدول (20): يبين عدد المستطيلات من الشكل (8)

رقم الصف					
1	0	1			
0	0	1	المجموع	1	المجموع الكلي
	1	2	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 2 \times 3$

من خلال النقاط البارزة الشكل(9)، يمكننا الحصول على عدد المستطيلات كما في الجدول (21):

الجدول (21): يبين عدد المستطيلات من الشكل (9)

رقم الصف						
2	1	2	4			
1	0	1	2			
0	1	3	6	المجموع	10	المجموع الكلي
	1	2	3	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 3 \times 4$

من خلال النقاط البارزة الشكل (10) يمكننا الحصول على عدد المستطيلات كما في الجدول (22):

الجدول (22): يبين عدد المستطيلات من الشكل (10)

رقم الصف							
3	2	4	6	9			
2	1	2	4	6			
1	0	1	2	3			
0	3	7	12	18	المجموع	40	المجموع الكلي
	1	2	3	4	رقم العمود		

- عندما $m \times n = 4 \times 5$

من خلال النقاط البارزة الشكل (11) يمكننا الحصول على عدد المستطيلات كما في الجدول (23):

الجدول (23): يبين عدد المستطيلات من الشكل (11)

رقم الصف								
4	3	6	9	12	16			
3	2	4	6	9	12			
2	1	2	4	6	8			
1	0	1	2	3	4			
	6	13	21	30	40	المجموع	110	المجموع الكلي
0	1	2	3	4	5	رقم العمود		

مما سبق يمكن استنتاج أنه إذا كان لدينا مستطيل مقسم لعدد $m \times n$ من المربعات الصغيرة، فإنه يمكننا الحصول على عدد من المستطيلات (طولها يختلف عن عرضها) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{m(m+1)\{3n(n-1)+2(m-1)\}}{12}$$

إذن $1+9+30+70+135+\cdots+\frac{mn(m+n-2)}{2}=\frac{m(m+1)\{3n(n-1)+2(m-1)\}}{12}$

حيث $m<n$ و $m\geq 1$

ولبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=2$ و $m=1$

$$\frac{1\times 2}{2}(1+2-2)=\frac{1\times 2(3\times 2\times 1+2\times 0)}{12}$$
$$\rightarrow 1=1$$

$\therefore$العلاقة صحيحة عندما $n=2$ و $m=1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=q$ و $m=p$ فتصبح العلاقة.

$$1+9+30+70+135+\cdots+\frac{pq(p+q-2)}{2}=\frac{p(p+1)\{3q(q-1)+2(p-1)\}}{12}$$

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=q+1$ و $m=p+1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(\frac{(p+1)(q+1)(p+q)}{2})$) فتصبح العلاقة.

$$1+9+30+70+135+\cdots+\frac{pq(p+q-2)}{2}+\frac{(p+1)(q+1)(p+q)}{2}$$
$$=\frac{p(p+1)\{3q(q-1)+2(p-1)\}}{12}+\frac{(p+1)(q+1)(p+q)}{2})$$
$$=\frac{(p+1)\{p\big(3q(q-1)+2(p-1)\big)+6(q+1)(p+q)\}}{12}$$
$$=\frac{(p+1)}{12}\{(3pq^2-3pq+2p^2-2p)+6pq+6q^2+6p+6q\}$$
$$=\frac{(p+1)}{12}\{3pq^2+3pq+2p^2+4p+6q^2+6q\}$$
$$=\frac{(p+1)}{12}\{3q^2(p+2)+3q(p+2)+2p(p+2)\}=\frac{(p+1)(p+2)}{12}\{3q^2+3q+2p\}$$
$$=\frac{(p+1)(p+2)}{12}\{3q(q+1)+2p\}=\frac{(p+1)\big((p+1)+1\big)}{12}\{3(q+1)((q+1)-1)+2((p+1)-1)\}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة $\forall\, m\,,n\,\epsilon\, N^+$ حيث $m\ <\ n$

ملاحظات:

- يمكننا الحصول على عدد المستطيلات (طولها لا يساوي عرضها) في الحالة السادسة من خلال حاصل ضرب رقم الصف في رقم العمود، مطروح منه الرقم الأصغر، انظر الجدول (20) مثلاً:

اللون الذهبي: $3\times 2-2=4$

اللون الأحمر: $2\times 5-2=8$

- يمكننا الحصول على عدد المستطيلات (طولها لا يساوي عرضها) من خلال إجابة السؤال الخامس مطروحة منها إجابة السؤال الرابع.

$$\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}-\frac{m}{6}(m+1)(3n-m+1)=\frac{m(m+1)}{12}\{3n^2-3n+2m-2\}$$
$$=\frac{m(m+1)}{12}\{3n(n-1)+2(m-1\}$$

ومن خلال الإجابة عن أسئلة البحث الفرعية يكون الباحث قد أجاب عن سؤال البحث الرئيس.

التوصيات:

في ضوء نتائج البحث التي تم التوصل إليها يوصي الباحث بما يلي:

- اهتمام القائمين على إعداد مناهج الرياضيات وتطويرها بالاهتمام بالمسألة الرياضية.
- إضافة مساق حل المسألة لبرنامج البكالوريوس في الجامعات اليمنية.
- زيادة تركيز اهتمام المعلمين في كليات التربية بالمسألة الرياضية ومهارات حلها دون التركيز فقط على ناتج الحل.
- اهتمام القائمين على الدورات التدريبية للمعلمين بوزارة التربية والتعليم بعقد دورات تدريبية لتأهيل المعلمين على كيفية التعامل مع المسألة الرياضية واستراتيجيات حلها.

مقترحات الدراسة:

يقترح الباحث إجراء البحوث التالية:

- بحث آخر يتناول حل مسائل رياضية متنوعة باستخدام الاستقراء الرياضي.
- بحث آخر يتناول حل مسائل رياضية باستخدام طرق مختلفة.
- بحث يجيب عن المسألة التالية: كم عدد المثلثات المرسومة في مربع مقسم إلى n من المربعات الصغيرة؟

المراجع:

[1] أبوأسعد، صلاح عبداللطيف (2010). أساليب تدريس الرياضيات. ط 1. دار الشروق. عمان. الأردن.

[2] أبوالحديد، فاطمة عبدالسلام (2013). طرق تعليم الرياضيات وتاريخ تطورها. ط 1. دار صفاء. عمان. الأردن.

[3] أبوزينة، فريد كمال (2010):" تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتعليمها"، ط 1، دار وائل للنشر، عمان.

[4] بدوي، رمضان مسعد (2003)، استراتيجيات في تعليم وتقويم تعلم الرياضيات، ط 1، دار الفكر، الأردن.

[5] البكري، أمل والكسواني، عفاف (2005):" أساليب تعليم الرياضيات"، ط 3، دار الفكر العربي، عمان.

[6] خليفة، خليفة عبدالسميع (1994):" تدريس الرياضيات في المدرسة الثانوية"، ط 3، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة.

[7] سلامة، عبدالحافظ (2003):" تعليم العلوم والرياضيات"ط1، دار اليازوري، عمان.

[8] سليمان، نائف وآخرون (2002):" أساسيات العلوم والرياضيات وأساليب تدريسها"، ط 1، دار الفرقان، عمان.

[9] الصادق، إسماعيل محمد (2001): " طرق تدريس الرياضيات نظريات وتطبيقات"، ظ 1، دار الفكر العربي، القاهرة، مصر.

[10] عبدالهادي، نبيل وآخرون (2002):" أساسيات العلوم والرياضيات وأساليب تدريسها"، ط1، دار الصفاء للنشر، عمان.

[11] عفانة، عزو إسماعيل (1995):" التدريس الاستراتيجي للرياضيات الحديثة"، ط1، كلية التربية الجامعة الإسلامية بغزة.

[12] عفانة، عزو إسماعيل (1996):" التكوين العاملي لصعوبات التفكير في حل المسألة الرياضية لدى طلبة الصفين الثاني والثالث الثانوي بغزة" مجلة التقويم والقياس النفسي والتربوي، جامعة الأزهر بغزة، العدد (8).

[13] فرج الله، عبدالكريم موسى (2014). أساليب تدريس الرياضيات. ط 1. دار اليازوري. عمان. الأردن.

[14] كرانتس، ستيفن جي. (2014). أساليب حل المسائل. ط 1. ترجمة معروف سمحان وفوزي الذكير. مكتب التربية العربي لدول الخليج. الرياض.

المراجع الأجنبية:

[15] Bernadette, E. (2010)." Third grade students' challenges and strategies to solving mathematical word problems. M.A. dissertation", The University of Texas at El Paso, United States, Texas.

[16] Stan dolan, barrie hunt, ron haydock:" pure mathematics", Cambridge university press, 1997.

RESEARCH ARTICLE

HOW MANY SQUARES AND RECTANGLES ARE DRAWN IN A SQUARE OR RECTANGLE DIVIDED INTO SMALL SQUARES?

Salem Ahmed Abdullah Abdalkabeer

Dept. of Mathematics, Faculty of Education - Aden, University of Aden, Yemen

***Corresponding author: Salem Ahmed Abdullah Abdalkabeer; E-mail: salemabdalkabeer@gmail.com**

Received: 02 September 2021 / Accepted: 21 September 2021 / Published online: 29 September 2021

Abstract

The aim of the research is to solve the problem: How many squares and rectangles are drawn in a square divided into n×n small squares or drawn in a rectangle divided into m×n (m<n) small squares? The researcher used induction to find public relations to solve the research questions, and he also used mathematical induction to prove the validity of the results. The researcher reached the following results:

1. The number of squares drawn in a square divided into n×n smaller squares is

$$n(n+1)(2n+1)/6$$

2. The number of rectangles (rectangular square) drawn in a square divided into n×n smaller squares equals

$$n^2(n+1)^2/4$$

3. The number of rectangles (their length differs from the width) drawn in a square divided into n×n smaller squares equals

$$n(n^2-1)(3n+2)/12$$

4. The number of squares drawn in a rectangle divided into m×n (m<n) small squares equals

$$m(m+1)(3n-m+1)/6$$

5. The number of rectangles (rectangular square) drawn in a rectangle divided into m×n (m<n) small squares equals

$$nm(n+1)(m+1)/4$$

6. The number of rectangles (their length differs from their width) drawn in a rectangle divided into m×n (m<n) small squares equals

$$\frac{m(m+1)\{3n(n-1)+2(m-1)\}}{12}$$

Keywords: Mathematical induction, Mathematical problem.

كيفية الاقتباس من هذا البحث:

عبد الكبير، س. أ. ع. (2021). كم عدد المربعات والمستطيلات المرسومة في مربع أو مستطيل مقسم إلى مربعات صغيرة؟. *مجلّة جامعة عدن الإلكترونيّة للعلوم الانسانيّة والاجتماعية*، 2(3)، 376-393. https://doi.org/10.47372/ejua-hs.2021.3.117